Задание № 13 Степенные ряды

*Задание может быть выполнено либо в формате документа Word, либо в виде фотографии выполненного на бумаге решения.*

26.1. Понятие функционального ряда

Рассмотрим последовательность функций  и составим из них формальный ряд .

М26.1.1 Определение: Ряд  называется *функциональным рядом*.

М26.1.2 Примеры: 1) , 

2) , 

3) , 

М26.1.3 Если в функциональный ряд вместо переменной  подставить какое-либо число, получится сходящийся или расходящийся числовой ряд. Пусть  - множество всех значений переменной , при которых ряд  сходится. Тогда можно говорить, что на числовом множестве  определена функция одной действительной переменной  значениями которой являются суммы соответствующих числовых рядов.

М26.1.4 Определение. Множество чисел , при которых сходится ряд , называется *областью сходимости* этого ряда.

26.2 Интервал сходимости степенного ряда

М26.2.1 Определение: Если  где - действительные числа, то ряд  называется *степенным рядом*.

М26.2.2 Примеры:  ,  , .

М26.2.3 Теорема Абеля (об интервале сходимости) Областью сходимости степенного ряда является открытый, полуоткрытый или замкнутый интервал с концами в точках  и  где  некоторое неотрицательное число или .

М26.2.4 *Замечание:* В частности, интервалом сходимости степенного ряда может оказаться единственная точка  или вся числовая прямая.

М26.2.5 Определение. Число , упоминаемое в теореме М26.2.3, называется *радиусом сходимости* степенного ряда.

26.3 Методы нахождения интервала сходимости степенного ряда

М26.3.1 Для практического нахождения интервала сходимости ряда можно применять *метод Даламбера*, состоящий в следующем: рассматривается предел (если он существует) .

Если этот предел меньше 1, то по признаку Даламбера, ряд сходится, если больше – расходится. Решая неравенство , находим открытый интервал, в точках которого ряд сходится. Вне этого интервала за исключением, может быть, концов интервала, ряд расходится.

Для проверки сходимости на концах интервала нужно подставить каждое из этих двух чисел в формулу ряда и, получив числовые ряды, проверить их сходимость.

М26.3.4 Пример 1: Найти интервал сходимости ряда 

*Решение*: . Решаем неравенство : .

Теперь проверяем сходимость на концах интервала: Подставим  в ряд : . Гармонический ряд расходится (М25.4.3).

Подставим точку : . Получили знакочередующийся ряд, удовлетворяющий условиям признака Лейбница (М25.8.2) Значит, ряд сходится.

Следовательно, интервалом сходимости данного ряда будет  .

М26.3.5 Пример 2. Найти интервал сходимости ряда 

*Решение:* 

Полученное неравенство верно при любых значениях переменной , т. к. не зависит от этой переменной. Значит, ряд сходится при любых значениях переменной и его интервалом сходимости является .

М26.3.6 Пример 3. Найти интервал сходимости ряда .

*Решение:* . При любом значении переменной предел будет равен . При  получается неопределенность . Поэтому проверим сходимость непосредственной подстановкой: . Ряд сходится. Значит, данный ряд сходится в единственной точке .

**Самостоятельная работа:**

21.5.1. Найти области сходимости степенных рядов: а) ; б) ; в) ; г) , ; д) ; е) , ; ж) ; з) ; и) ;

21.5.2. Найти области сходимости степенных рядов: а) ; б) ; в) ; г) ; д) ; е) ;

21.5.3. Найти области сходимости степенных рядов: а) ;; б) ; в) ; г) ;

**Ответы:**

**21.5.1.** а) ; б) ; в) ; г) при ;  при ;  при ; д) ; е) при ;  при ;  при ; ж) ; з) ; и) единственная точка ;

**21.5.2.** а) ; б) ; в) ; г) ; д) ; е) ;

**21.5.3.** а) ; б) ; в) ; г) ;